Solución numérica de un problema de Laplace en el contexto de electroencefalografía

Andry Alexander Peregrino Rodríguez[1]
Dr.Jorge López López[2]
Dr.José Jacobo Oliveros Oliveros[3]
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
[1]andry18peregrino8@gmail.com
[2]jorge.lopez@ujat.mx
[3]operadoradjunto@gmail.com

Resumen

El cerebro humano representa un gran desafío para la ciencia debido a su complejidad y ha sido estudiado desde diferentes perspectivas y con diferentes herramientas como la electroencefalografía, la cual es una técnica de exploración neurofisiológica que registra la actividad bioeléctrica cerebral a partir de electrodos colocados en el cuero cabelludo, un electroencefalograma es el registro obtenido mediante esta técnica.

De esta manera, se considera el Electroencefalograma (EEG) para estudiar anomalías patológicas en el cerebro tales como focos epilépticos, edemas y tumores cerebrales, ya que su registro corresponde al potencial generado por grandes conglomerados de neuronas que trabajan simultáneamente y son llamados generadores del EEG o fuentes bioeléctricas que pueden ser corticales y subcorticales. En este caso, para establecer correlaciones entre las fuentes y las mediciones, se han utilizado problemas de valores en la frontera. Ya que la región en la que se estudia un problema puede ser no homogéneo, deben considerarse condiciones apropiadas de frontera en las interfaces de separación de las diferentes regiones que componen a dicha región.

En este cartel se aplica el método del elemento finito (MEF) para resolver un problema de Laplace en un dominio circular, como los que aparecen en el contexto de identificación de fuentes encefalográficas.

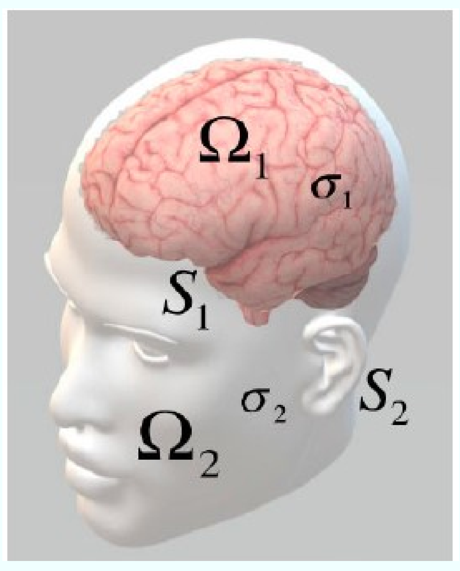

Figura 1: *Un modelo de la cabeza en capas conductoras.*

1. Planteamiento del problema

Nuestro objetivo es estudiar el siguiente problema de contorno para dominios Ω_1 y Ω_2 en $\mathbb{R}^2$:

$$\triangle u_1 = 0, \quad \text{en} \quad \Omega_1, \tag{1.1}$$
$$\triangle u_2 = 0, \quad \text{en} \quad \Omega_2, \tag{1.2}$$

con las condiciones de frontera

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre} \quad S_1, \tag{1.3}$$
$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \quad \text{sobre} \quad S_1, \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre} \quad S_2, \tag{1.5}$$

Aquí se considera que la región Ω_1 es la patología que se presenta y la región Ω_2 será el resto del cerebro, cuya frontera exterior es S_2.

Definición 1. *Dada $g \in L_2(S_1)$, que satisface la condición de compatibilidad, una función $u \in H^1(\Omega)$ es llamada una solución débil del problema (1.1)–(1.5) si satisface la siguiente relación:*

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \triangledown u_1 \cdot \triangledown v d\Omega + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \triangledown u_2 \cdot \triangledown v d\Omega = \int_{S_1} g v ds \tag{1.6}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ y donde $H^1(\Omega)$ es un espacio de Sobolev contenido en $L_2(\Omega)$

Teorema 1. *La condición de compatibilidad de la función g es necesaria y suficiente para la existencia de la solución débil del problema (1.1)–(1.5). Hay una única solución débil u que satisface $\int_\Omega u(x)dx =< u, 1 >_{L_2(S_1)} = 0$ y además*

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C||g||_{L_2(S_1)}$$

donde C no depende de g.

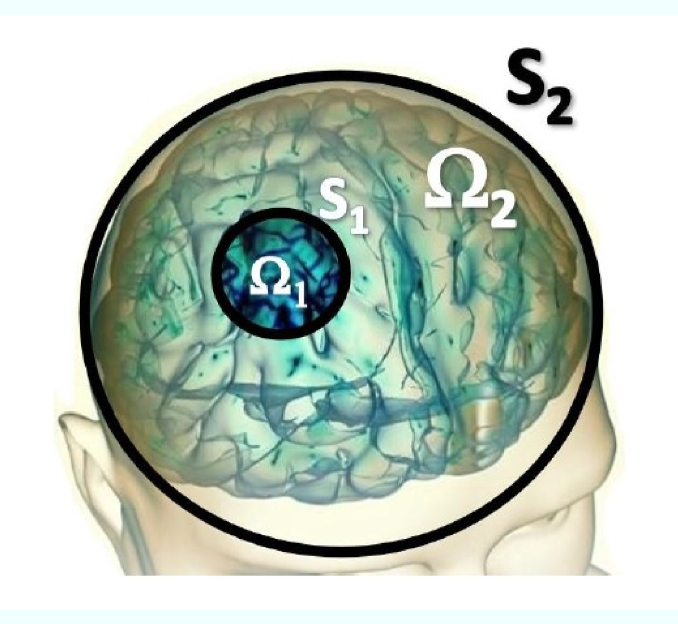

Figura 2: *Esquema de esferas anidadas.*

Presentamos las definiciones del problema directo e inverso para un tumor cerebral:

Definición 2. `Problema Directo`. *Dada la función g definida sobre S_1, el problema directo consiste en hallar la restricción a la frontera de la región (medición) de la solución del problema anterior, es decir, hallar $V = u|_{S_2}$.*

Definición 3. `Problema Inverso`. *Dada a la función V definida sobre S_2, el problema consiste en hallar una función fuente g definida sobre S_1, tal que la solución u del problema dado satisface que $V = u|_{S_2}$*

2. Ideas del elemento finito

Consideremos el problema de encontrar $u \in C^2(\Omega)$ tal que:

$$\left.\begin{aligned} \alpha u - \nu \triangle u &= f, \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u &= g_0, \quad \text{en} \quad \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_1, \quad \text{en} \quad \Gamma_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Para resolver numéricamente este problema por elemento finito consideramos el siguiente teorema:

Teorema 2. *Toda función u que resuelva (2.1), tambien resuelve el problema de encontrar $u \in V$ tal que para toda $v \in W$ se tiene:*

$$\int_\Omega \alpha u v + \int_\Omega v \triangledown u \cdot \triangledown v = \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\gamma \tag{2.2}$$

donde

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \quad | \quad v = g_0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \right\}$$
$$W = \left\{ v \in H^1(\Omega) \quad | \quad v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \right\}$$

Definición 4. *A una función u que resuelva (2.2) se le llama solución debil de (2.1).*

Para la solución numérica sustituimos $H^1(\Omega)$ por un subespacio de dimensión finita, el cuál definimos como:

$$H_h(\Omega) = \left\{ v \in C^0(\Omega) \quad : \quad v|_k \in P_1(k), \quad k \in \tau_h \right\}$$

De igual manera, se tienen las siguientes definiciones:

$$W_h(\Omega) = \{ v \in H_h(\Omega) \quad | \quad v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \}$$
$$V_h(\Omega) = \{ v \in H_h(\Omega) \quad | \quad v = g_0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \}$$

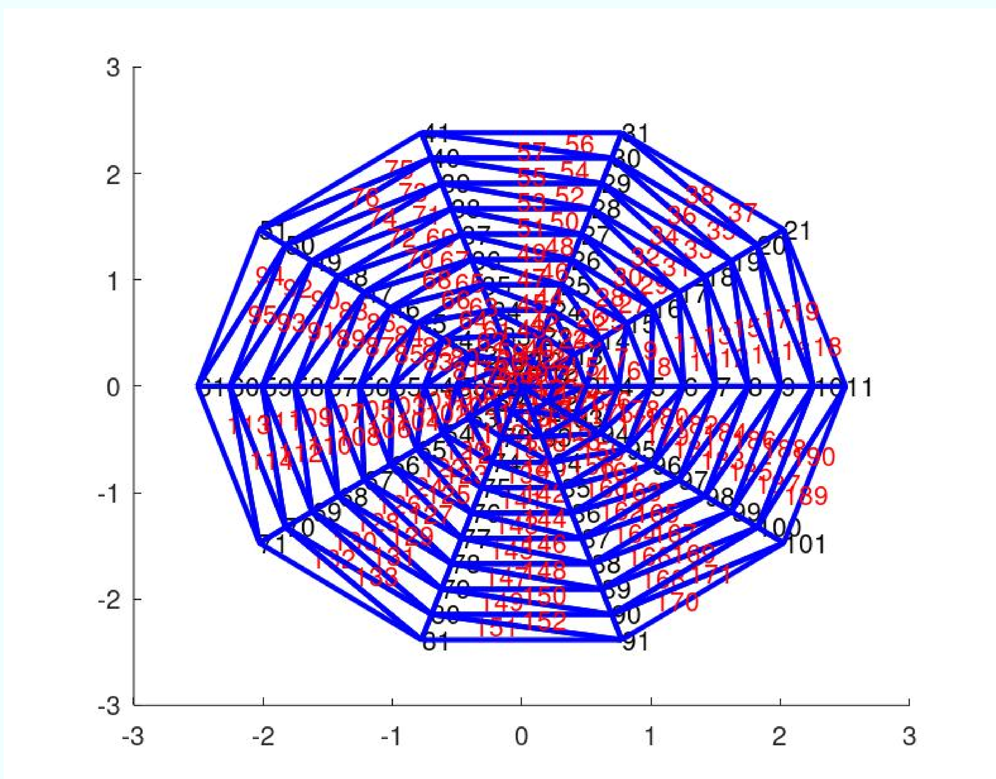

Figura 3: *Malla de un dominio circular y su triangulización τ_h.*

De esta manera tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3. *Cada función en $H_h(\Omega)$ está completamente definida por sus valores en los nodos.*

Una base de H_h son las funciones v_j^h que están en H_h y que toman los siguientes valores: $v_j^h(n_i) = \delta_{ij}$ para n_i un vértice o nodo de la triangulización de τ_h, y de acuerdo al teorema anterior buscamos una solución u en V_h para la cual se cumpla (2.2) para toda v en W_h, lo cual se reduce a resolver el sistema algebraico lineal $Au = b$, donde A es una matriz simétrica y definida positiva y cada una de sus entradas viene dada como:

$$a_{ij} = \alpha \int_\Omega v_i^h v_j^h + \gamma \int_\Omega \triangledown v_i^h \triangledown v_j^h$$

y las entradas de b se dan como sigue:

$$b_i = \int_\Omega f v_i^h + \int_{\Gamma_1} g_1 v_i^h + \sum_{j=n+1}^{N} a_{ij} g_{0j}$$

donde $g_{0j} = g_0(n_j)$ es un arreglo con los valores de u en cada uno de los nodos.

3. Resultados numéricos

Las ideas expuestas se programaron en un código en Octave aplicando el método del elemento finito y se aplicaron al siguiente ejemplo:

Consideramos: el dominio circular Ω con centro en $(0, 0)$ y radio 2π; $f = (\alpha + 4\nu r^2)Cos(r^2)$; $\alpha = 3/2$; $\gamma = 1/2$; $r^2 = x^2 + y^2$; $\Gamma_1 = \Gamma$ (Γ_0 no existe) y $g_1 = 0$ (g_0 no existe).

Para estos datos, la solución exacta en el dominio Ω es:

$$u = cos(x^2 + y^2).$$

En las figuras 4 y 5 se muestran la solución aproximada y la solución exacta obtenida con la malla de la figura 3.

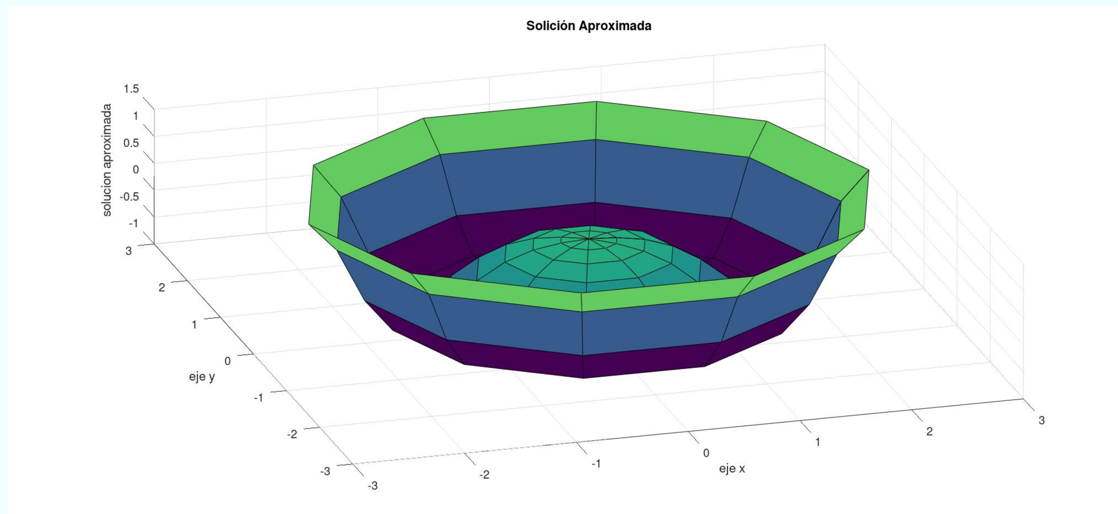

Figura 4: *Solución aproximada.*

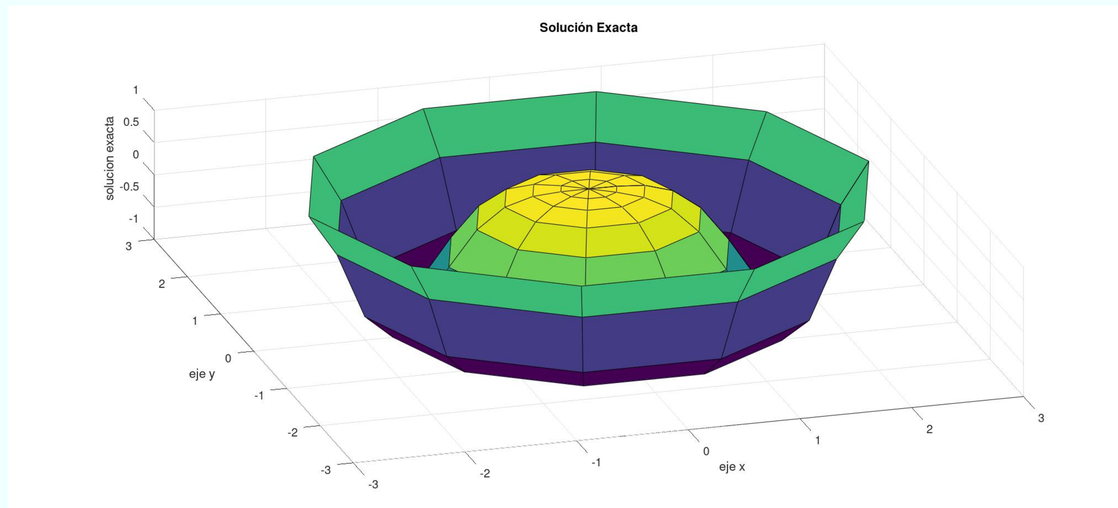

Figura 5: *Solución exacta.*

4. Conclusiones

Hemos presentado los avances en la solución de un problema elíptico del tipo (2.1), en el caso particular de un dominio circular. Esto es de interés porque entendiendo como se aplica el método del elemento finito para resolver la versión variacional (2.2), se puede resolver de manera inmediata el problema (1.1)–(1.5) cuya versión variacional es (1.6). En cuanto a los resultados del ejemplo, se observa una discrepancia entre la solución aproximada y la exacta, en la parte central del dominio. Esto está asociado con la dificultad de la solución exacta y el tipo de elementos finitos usados (triángulos y funciones lineales). Se continuará trabajando en la mejora de la malla, el tipo de elementos finitos y en la solución del problema (1.6), es decir, en la aproximación numérica por elemento finito de u_1 y u_2, o en otras palabras, dada una fuente g conocer una versión numérica del EEG V, obteniendo u_2 (y u_1) y restringiéndola a S_2.

Referencias

[1] E. Estrada, J. Oliveros, J. Conde (2021). *Modelos matemáticos asociados a patologías en el cerebro y análisis de problemas directos e inversos.* BUAP.

[2] D. Chablé, J. López, L. Héctor. *Generación de campos de viento por método variacionales.* Revista de Ciencias Básicas UJAT, vol. 1, No.1.

[3] Heller L. *Return Current in Encephalography. Variational Principles.* Biophysical Journal, vol. 57, (1990), pp. 601–606.

[4] Conde Mones, J.J.; Estrada Aguayo, E.R.; Oliveros Oliveros, J.J.; Hernández Gracidas, C.A.; Morán Castillo, M.M. *Stable Identification of Source Located on Interface of Nonhomogeneous Media.* Mathematics, 2021, 9, 1932.