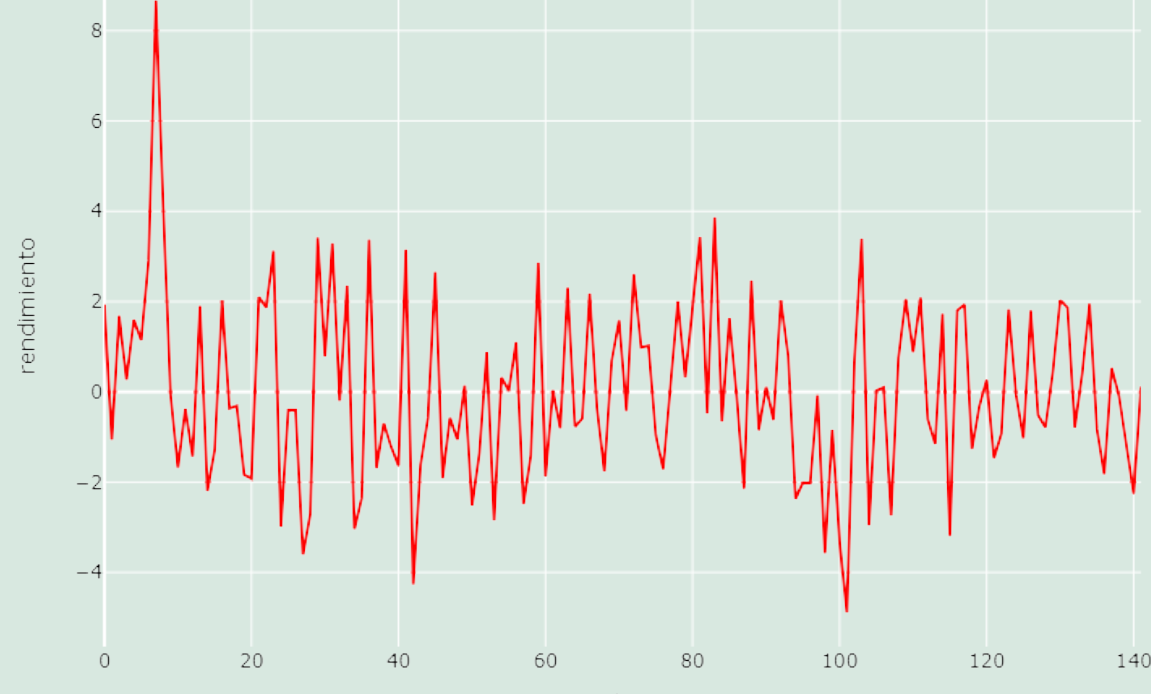


## Introducción

Los modelos GARCH en finanzas se usan para modelar la volatilidad de una serie, por ejemplo, una serie de rendimientos. Por otro lado, el modelo de Black-Litterman es usado en la optimización de portafolios de inversión donde se incorporan las opiniones del inversor para determinar la asignación óptima de activos.



Combinando estas dos herramientas, podemos incorporar opiniones basadas en información objetiva para mejorar la optimización del portafolio de inversión.

## Modelo GARCH(p,q)

Surgen en 1986 por Bollerslev como una mejora a los modelos ARCH (Engle 1982) para describir la volatilidad de series financieras.

Sea una serie de tiempo  $y_t$ , entonces

$$y_t = \mu_t + a_t,$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

con  $\mu_t$  la media de los datos al tiempo  $t$ ,  $a_t$  son los residuos,  $\varepsilon_t$  son v.a.i. con media cero y varianza uno, y  $\sigma_t$  es la volatilidad de los datos al tiempo  $t$ .

Modelamos la volatilidad de la serie mediante un modelo GARCH(p,q):

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

donde  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ , para  $i, j > 0$ .

## Aplicación

Sea una empresa del sector forestal que desea obtener información acerca de otras empresas:

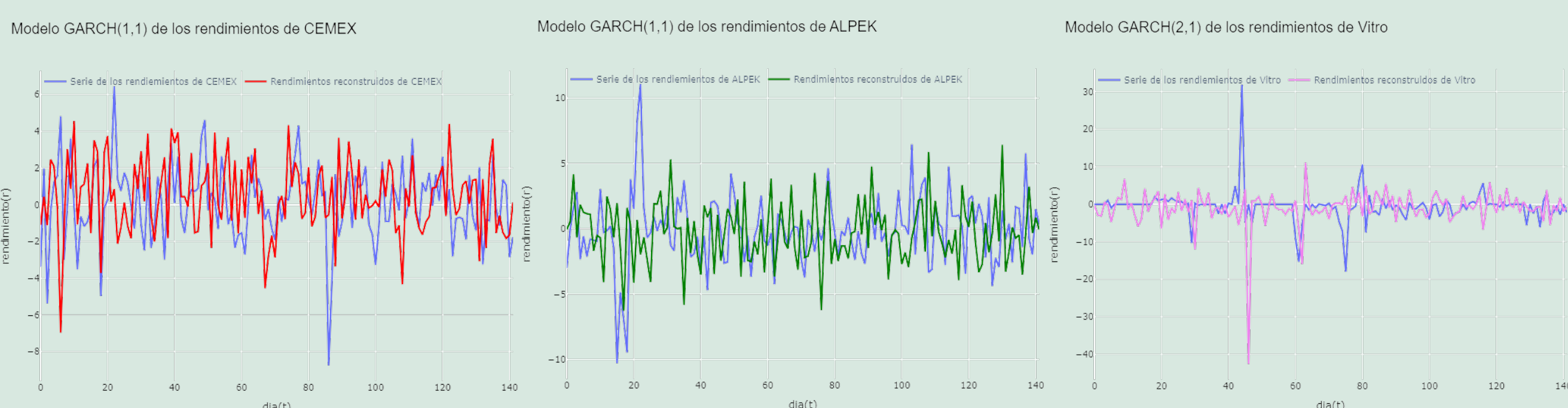


La información obtenida son los precios de las acciones del 1/10/2023 hasta 31/05/2024; son 142 datos, y calculamos la serie de los rendimientos logarítmicos porcentuales  $r_t^p = 100 \ln \left( \frac{P_{t+1}}{P_t} \right)$ , para  $t = 0, \dots, 140$ .

Modelamos su volatilidad mediante GARCH y seleccionamos  $p, q$  mediante el criterio BIC y AIC.

Modelo	CEMEX		ALPEK		Vitro	
	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC
GARCH(1,1)	620.2424	608.4474	685.1684	673.3734	785.5021	773.7070
GARCH(1,2)	625.1912	610.4474	688.7390	673.9952	790.4508	775.7070
GARCH(2,1)	625.1912	610.4474	690.1172	675.3734	754.9403	740.1965
GARCH(2,2)	630.1400	612.4474	693.6878	675.9952	757.9644	740.2718

Con el modelo GARCH seleccionado se calcula el valor de  $\hat{\sigma}_{141}$  para reconstruir los rendimientos. Sea  $X$  la variable aleatoria que modela la predicción de  $r_{141}$ , simulamos 50 mil veces y estimamos el valor esperado de  $\hat{r}_{141}$ .



Tomamos el valor esperado de las predicciones de cada serie como la predicción y podemos comparar con el rendimiento que se quiso predecir.

Datos Reales	Valor esperado	Error absoluto	Error absoluto real
-1.755713	0.129680	1.885393	0.018854
0.315706	-0.074197	0.389903	0.003899
-2.247283	-0.745902	1.501381	0.015014

## Modelo de Black-Litterman(1990)

Se basa en el modelo CAPM y de Markowitz e incorpora las expectativas futuras del mercado (*views*) para estimar mejor los rendimientos esperados. El modelo es una aplicación de la estadística bayesiana:

$$P(\theta|y) \propto P(y|\theta)P(\theta).$$

- La información muestral genera una distribución a priori  $P(\theta)$  de los rendimientos del portafolio.
- Los views se utilizan para generar una distribución a posteriori  $P(\theta|y)$  de los rendimientos.

Sean  $N$  acciones y dados sus rendimientos históricos en exceso, debemos

$$\text{Máx } U(\vec{w}) = \vec{w}^T \hat{\Pi} - \frac{\lambda}{2} \vec{w}^T \hat{\Sigma} \vec{w}, \quad (1)$$

donde  $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\hat{\Sigma}$  es la matriz de varianza-covarianza muestral,  $\hat{\Pi}$  es la estimación de los valores esperados de los rendimientos de los activos y  $\lambda > 0$  es un parámetro que mide la aversión al riesgo.

Incorporamos la información del inversor en una matriz  $P$  y un vector  $Q$  tal que:

- $P$ : Define las opiniones sobre los activos. Cada fila de  $P$  corresponde a una opinión y cada columna a un activo. Los valores en  $P$  representan el impacto relativo de cada activo en la opinión.
- $Q$ : Especifica las expectativas de rendimiento en opinión. Cada elemento de  $Q$  es la expectativa de rendimiento asociada a la correspondiente vista en  $P$ .

La solución de (1) se obtiene al resolver para  $\vec{\mu}_{BL}$ :

$$\left[ (\tau \hat{\Sigma})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right] \vec{\mu}_{BL} = (\tau \hat{\Sigma})^{-1} \hat{\Pi} + P^T \Omega^{-1} Q, \quad (2)$$

donde  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ , con  $\omega_i = P_i \Sigma P_i^T$ , y  $\tau$  es un parámetro que está relacionado con la confianza que se tiene en los views. Al resolver para  $\vec{v}$ :

$$\lambda \hat{\Sigma}_p \vec{v} = \vec{\mu}_{BL} \quad \text{con} \quad \hat{\Sigma}_p = \hat{\Sigma} + \hat{M}, \quad \hat{M} = \left[ (\tau \hat{\Sigma})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1}. \quad (3)$$

Finalmente, aplicando la condición  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ , obtenemos al portafolio  $\vec{w}$ , donde  $w_i = v_i / \sum_{k=1}^N v_k$ .

## Resultados

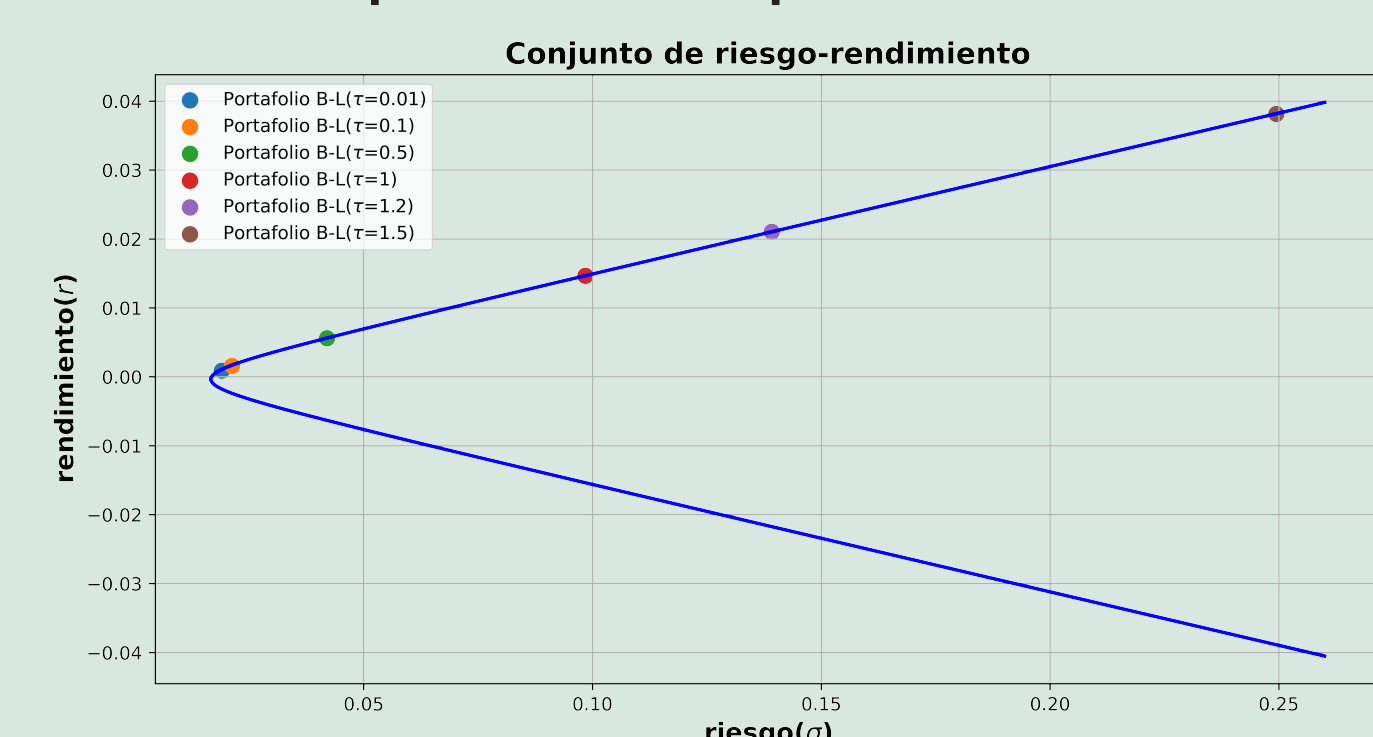
De los modelos GARCH incorporamos los views:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0012968 \\ -0.00074197 \\ -0.007459 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el problema de optimización, obtenemos distintos portafolios para distintos valores de  $\tau$ .

$\tau$	Portafolio $\vec{w}$	Riesgo (%)	Rendimiento (%)
0.01	[0.88059, 0.11103, 0.008378]	1.89582%	0.090298%
0.1	[0.99221, 0.09149, -0.083706]	2.120947%	0.1587357%
0.5	[1.6330632, -0.003496, -0.62956719]	4.19865%	0.55998857%
1	[3.06593412, -0.19558712, -1.870347]	9.844774%	1.466982789%
1.2	[4.0691061, -0.32725641, -2.74184968]	13.916526%	2.1033467%
1.5	[6.76517455, -0.67885814, -5.0863164]	24.941992%	3.8147%

Podemos observar que se tienen ventas en corto en la mayoría de los portafolios, además a medida de que la confianza en los views aumenta, aumenta el rendimiento del portafolio pero también aumenta el riesgo.



## Bibliografía

- [1] Black, F., Litterman, R. Asset Allocation: Combining investor views with market equilibrium. The Journal of Fixed Income, 7-18. 1991.
- [2] Ruey S. Tsay, Analysis of Financial Time Series. 2nd Edition. Wiley, 2005.
- [3] Christian Francq, Jean-Michel Zakoian. GARCH Models Structure, Statistical Inference and Financial Applications. Edition. Wiley and Sons, Ltd., Publication. 2010.